Leçon 162 : Systèmes d'équations linéaires, opérations élémentaires. Aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

Références : Grifone, Caldero (Histoires...), Rombaldi + (endive matricielle), Allaire (+ voir poly C. Armana!)

I - Généralités sur les systèmes linéaires

1) Définitions et interprétations

2) Structure de l'espace des solutions

a) Systèmes homogènes

b) Systèmes quelconques

3) Solubilité d'un système linéaire

a) Systèmes de Cramer

b) Systèmes quelconques

II - Opérations élémentaires et pivot de Gauss

1) Opérations élémentaires

2) Méthode du pivot de Gauss et applications

3) Décomposition LU et de Cholesky

III - Méthodes itératives

1) Principe

2) Convergence d'une méthode itérative

3) Exemples de méthodes itératives

DEV 1 : Connexité de $SL_n(K)$, de $GL_n(\mathbb{C})$

DEV 2 : Décomposition LU et Cholesky

Leçon 162 : Systèmes d'équations linéaires, opérations élémentaires. Aspects algorithmiques et conséquences théoriques

Soit K un corps commutatif, $p, n \in \mathbb{N}^*$.

I - Généralités sur les systèmes linéaires

1) Définitions et interprétation [GRi]

DEF 1 : Un système linéaire de p équations à n inconnues est un système de la forme
$$(*)\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + \cdots + a_{p,n}x_n = b_p \end{cases}$$
où les $a_{i,j}$ et b_j sont dans K. On appelle solution tout vecteur $x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$ dont les composantes x_i satisfont toutes les équations.

DEF 2 : Le système est dit compatible s'il admet au moins une solution. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions.

REM 3 : (expression matricielle) Soient $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & \cdots & a_{p,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(K)$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$. Le système $(*)$ peut s'écrire sous la forme matricielle $AX = B$.

DEF 4 : On appelle rang du système le rang de A.

REM 5 : (expression vectorielle) Notons $\vec{C_1}, \dots, \vec{C_n}$ les colonnes de A. Alors : $X \in \mathcal{S} \Leftrightarrow x_1\vec{C_1} + \cdots + x_n\vec{C_n} = \vec{b}$

PROP 6 : $(*)$ est compatible si et seulement si $\vec{b} \in \mathrm{Vect}(\vec{C_1}, \dots, \vec{C_n})$

2) Structure de l'espace des solutions

a) Systèmes homogènes [Rot] [GRi]

On suppose ici que $(*)$ s'écrit $AX = 0$.

THM 7 : Il existe $(\varphi_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$ des formes linéaires sur K^n telles que $\mathcal{S} = \bigcap_{i=1}^{p} \ker(\varphi_i)$. En notant $r = \mathrm{rg}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$, $\mathcal{S}$ est donc un sous-espace vectoriel de K^n de dimension $n-r$.

EX 8 : $\begin{cases} x-y=0 \\ x+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi_1(X)=0 \\ \varphi_2(X)=0 \end{cases} \Leftrightarrow X \in \ker(\varphi_1) \cap \ker(\varphi_2)$ avec $\varphi_1 : X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x-y$ et $\varphi_2 : X \mapsto x+z$. Ici, $\dim(\mathcal{S}) = 3-2 = 1$

THM 9 : Soit F un sous-espace vectoriel de K^n de dimension m. Alors il existe $n-m$ formes linéaires linéairement indépendantes $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-m}$ telles que $F = \bigcap_{i=1}^{n-m} \ker(\varphi_i)$

EX 10 : Soit $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ le sous-espace de $\mathbb{R}^5$ engendré par $v_1 = (1,3,-2,2,3)$, $v_2 = (1,4,-3,4,2)$ et $v_3 = (2,3,-1,-2,9)$. F est l'ensemble des solutions du système : $\begin{cases} -x_1+x_2+x_3=0 \\ 4x_1-2x_2+x_4=0 \\ -6x_1+x_2+x_5=0 \end{cases}$

b) Systèmes quelconques

THM 11 : Soit le système (S) : $AX = \vec{b}$ et (S_H) le système homogène associé $AX = 0$. Alors, soit $\mathcal{S} = \emptyset$ ou $\mathcal{S}$ est un espace affine de direction $\mathcal{S}_H = \ker(A)$

REM 12 : En pratique, on cherche donc toutes les solutions du système homogène associé (une base de $\ker(A)$) et une solution particulière.

EX 17 : L'ensemble des solutions de $\begin{cases} x-3y+7z=-4 \\ x+2y-3z=6 \\ 7x+4y-5z=22 \end{cases}$ est $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

3) Solubilité d'un système linéaire [GRi].

a) Systèmes de Cramer

DEF 18 : On appelle système de Cramer un système linéaire dont la matrice A est carrée et inversible.

REM 19 : Il s'agit donc d'un système $AX = b$ avec $A \in \mathcal{M}_n(K)$, $\det(A) \neq 0$.

PROP 20 : Un système de Cramer admet une et une seule solution donnée par $X = A^{-1}B$.

THM 21 : On a les formules de Cramer pour exprimer les solutions. Si (S) est de Cramer, en notant $\vec{C_1}, \dots, \vec{C_n}$ les colonnes de A, alors (S) admet une et une seule solution pour tout $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$ donnée par :
$$\forall i \in [\![1;n]\!],\ x_i = \frac{1}{\det(A)} \det(\vec{C_1}, \dots, \vec{C_{i-1}}, \vec{b}, \vec{C_{i+1}}, \dots, \vec{C_n})$$

EX 22 : Le système $\begin{cases} 2x-5y+2z=7 \\ x+2y-4z=3 \\ 3x-4y-6z=5 \end{cases}$ admet une unique solution $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

b) Systèmes quelconques

On revient au cas du système $(*)$ et on suppose, quitte à changer l'ordre des équations et la numérotation des inconnues, que $\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,r} \\ a_{r,1} & \cdots & a_{r,r} \end{vmatrix} \neq 0$.

DEF 23 : Les équations $\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,r}x_r + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{r,1}x_1 + \dots + a_{r,r}x_r + \dots + a_{r,n}x_n = b_r \end{cases}$ sont dites principales. Les autres sont dites secondaires. Les inconnues $x_1, \dots, x_r$ sont dites principales, les autres sont appelées paramètres (ou variables libres).

THM 24 (Rouché-Fontené) : Soit $\delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r,1} & \cdots & a_{r,r} \end{vmatrix} \neq 0$.

1) (*) est compatible si et seulement si pour tout $s \in [\![r+1;n]\!]$

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,r} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r,1} & \cdots & a_{r,r} & b_r \\ a_{s,1} & \cdots & a_{s,r} & b_s \end{vmatrix} = 0$$

2) Dans ce cas, le système admet une infinité de solutions dépendantes de $n-r$ paramètres

II - Opérations élémentaires et pivot de Gauss

1) Opérations élémentaires [CAL] Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$

DEF 25 : On appelle pivot d'une ligne non nulle le coefficient non nul situé le plus à gauche. Une matrice est dite échelonnée en lignes lorsque :
- si une ligne est nulle, toutes les suivantes sont nulles
- le pivot d'une ligne est strictement plus à droite que celui de la précédente

On dit qu'elle est échelonnée réduite si de plus :
- tous les pivots sont égaux à 1
- les pivots sont les seuls coefficients non nuls de leur colonne

EX 26 : La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée réduite.

DEF 27 : Un système linéaire $AX = b$ est dit échelonné lorsque sa matrice est échelonnée

PROP 28 : Le rang d'un système (ou d'une matrice) échelonné se lit en comptant le nombre de pivots. On obtient alors facilement la dimension de $\mathcal{S}$.

THM 29 : On considère l'action par multiplication à gauche de $GL_p(K)$ sur $\mathcal{M}_{p,n}(K)$: $(P, A) \mapsto PA$. Alors, pour $A, A' \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$: A et A' sont dans la même orbite $\Leftrightarrow \ker(A) = \ker(A')$.

DEF 30 : Soit $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p}$ les matrices élémentaires. On définit :
- les matrices de dilatation : $D_i(\alpha) = I_n + (\alpha - 1)E_{i,i}$
- les matrices de transvection $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$ $(i \neq j)$
- les matrices de permutation $P_{(i,j)} = \begin{pmatrix} I_{i-1} & & & & \\ & 0 & \cdots & 1 & \\ & & I_{j-i-1} & & \\ & 1 & \cdots & 0 & \\ & & & & I_{p-j} \end{pmatrix}$

PROP 31 : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$. Multiplier à gauche (resp. à droite) A par une matrice de la DEF 30 a des conséquences sur les lignes (resp. les colonnes) :

Opération	$D_i(\alpha)A$	$T_{i,j}(\lambda)A$	$P_{i,j}A$
Résultat	$L_i \leftarrow \alpha L_i$	$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$	$L_i \leftrightarrow L_j$

De même à droite sur les colonnes

PROP 32 : Les matrices de la DEF 30 sont inversibles et $D_i(\alpha)^{-1} = D_i\left(\frac{1}{\alpha}\right)$; $T_{i,j}(\lambda)^{-1} = T_{i,j}(-\lambda)$; $P_{i,j}^{-1} = P_{i,j}$

2) Méthode du pivot de Gauss et applications [Rom] [CAL] [GA]

La méthode du pivot (A1) fournit les résultats suivants

THM 33 : Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$. La matrice peut être transformée en une matrice échelonnée réduite (appelée réduite de Gauss) par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes de A.

REM 34 : Il existe donc $P \in GL_n(K)$ tel que $PA = A'$ avec A' échelonnée réduite et P est produit de matrices de DEF 30.

COR 35 : Toute matrice est dans l'orbite d'une matrice échelonnée en ligne (pour l'action de THM 29) : DEV 1

THM 36 : Toute matrice $A \in GL_n(K)$ s'écrit $A = \prod_{k=1}^{r} P_k D_n(\lambda) \prod_{j=1}^{s} Q_j$ où $\lambda = \det(A)$, $P_1, \dots, P_r, Q_1, \dots, Q_s$ sont des matrices de transvection

COR 37 : Les groupes $SL_n(\mathbb{R})$, $SL_n(\mathbb{C})$, $GL_n(\mathbb{C})$ sont connexes par arcs

REM 38 : Échelonner et réduire la matrice d'un système permet de le résoudre facilement.

PROP 39 : Si A' est l'échelonnée réduite de A alors les systèmes $AX = B$ et $A'X = B'$ sont équivalents (donc ont le même ensemble de solutions).

PROP 40 : Le pivot de Gauss permet de calculer l'inverse d'une matrice : $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est inversible si et seulement si elle possède n pivots si et seulement si sa réduite de Gauss est I_n.

EX41: On peut déterminer si une famille libre et à défaut en extraire une base. La famille $((1,-2,-3),(2,3,1),(3,2,1))$ est libre dans $\mathbb{R}^3$.

EX42: On peut compléter une famille libre en une base et déterminer un supplémentaire, par exemple pour $((1,2,-1,0,1),(2,1,1,1,1),(3,2,0,1,2))$ dans $\mathbb{R}^5$.

EX43: On peut déterminer une base de $F+G$, $F\cap G$ avec $F=\mathrm{Vect}(v_1,v_2,v_3)$ et $G=\mathrm{Vect}(w_1,w_2)$ des sev de $\mathbb{R}^4$ où : $v_1=(1,-1,0,2)$, $v_2=(2,1,3,1)$, $v_3=(4,5,9,-1)$, $w_1=(1,1,1,1)$ et $w_2=(3,-4,4,2)$.

THM44: Soit $A\in\mathcal{M}_{m,n}(K)$ de rang r. Alors il existe $P\in GL_m(K)$, il existe $Q\in GL_n(K)$ telle que $PAQ^{-1}=J_{m,n,r}$ avec $J_{m,n,r}=\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{m-r,r} & 0_{m-r,n-r}\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{m,n}(K)$

3) Décomposition LU et de Cholesky [ROM] [ALL]

DEF45: Les sous-matrices principales de $A=(a_{i,j})_{1\le i,j\le n}\in GL_n(K)$ sont les $(a_{i,j})_{1\le i,j\le k}$ où $k\in[\![1;n]\!]$ et les déterminants principaux sont les $\Delta_k=\det(A_k)$.

DEV 2

THM46: Soit $A\in GL_n(K)$. A admet une décomposition $A=LU$ où L est triangulaire inférieure à diagonale unité et U est triangulaire supérieure si et seulement si tous les déterminants principaux de A sont non nuls. Lorsqu'elle existe une telle décomposition est unique.

THM47: Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $A\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si il existe B triangulaire inférieure inversible telle que $A=B^tB$.

REM48: Cette méthode est utile pour résoudre les systèmes : $AX=b \Leftrightarrow LUx=b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly=b \\ y=Ux\end{cases}$

III - Méthodes itératives

1) Principe [ALL]

DEF49: Soit $A\in GL_n(\mathbb{R})$. On introduit une décomposition dite régulière de A c'est-à-dire un couple de matrices (M,N) avec M inversible (facile à inverser) tel que $A=M-N$. On définit la méthode itérative associée :
$$\begin{cases} x_0\in\mathbb{R}^n \\ Mx_{k+1}=Nx_k+b \quad \forall k\geq 1.\end{cases}$$

REM50: Si (x_k) converge vers x, on obtient par passage à la limite $(M-N)x=Ax=b$ donc x est la solution du système.

2) Convergence d'une méthode itérative [ALL]

DEF51: On dit qu'une méthode itérative converge lorsque pour tout $x_0\in\mathbb{R}^n$, la suite x_k converge vers la solution exacte x.

LEMME52: La méthode converge si et seulement si $\rho(M^{-1}N)<1$ où ρ est le rayon spectral.

LEMME53: Soit A hermitienne définie positive. On suppose qu'on a $A=M-N$ avec M inversible. Alors (M^*+N) est hermitienne et si M^*+N est définie positive alors $\rho(M^{-1}N)<1$.

3) Exemples de méthodes itératives [ALL]

On écrit $A=\begin{pmatrix} D & -F \\ -E & D \end{pmatrix}$

Nom	M	N	
Jacobi	D	$D-A$	Si $A\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, la méthode converge
Gauss-Seidel	$D-E$	F	Si $A\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, la méthode converge
Relaxation	$\frac{D}{\omega}-E$	$\frac{1-\omega}{\omega}D+F$	$(\omega\in\mathbb{R}^+)$
Gradient	$\frac{1}{\alpha}I_d$	$\frac{1}{\alpha}I_d-A$	$\alpha\in\mathbb{R}^*$

ANNEXE 1 : Méthode du pivot de Gauss

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$. Le but est d'effectuer des opérations élémentaires sur les lignes de A pour se ramener à une matrice échelonnée réduite.

Étape 0 : On se ramène à un système tel que $a_{1,1}$ soit non nul en permutant des lignes si nécessaire puis en divisant L_1 par $a_{1,1}$ pour avoir $a_{1,1} = 1$ (premier pivot)

Étape 1 : Ensuite, on effectue les opérations :
$L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}} L_1$ sur la nouvelle matrice.
Puis quitte à échanger des lignes et diviser par un coefficient non nul, on trouve le 2e pivot sur la 2e ligne

Étape k : Supposons que $\tilde{a}_{k,k}$ est le k-ième pivot
On effectue les opérations $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i,k}}{\tilde{a}_{k,k}} L_k$
On continue jusqu'à avoir une matrice échelonnée
Pour réduire, on utilise les pivots (égaux à 1) pour éliminer les coefficients sur leur colonne

ANNEXE 2 : LU en pratique

On applique le pivot à A jusqu'à avoir U triangulaire supérieure et on fait les mêmes opérations sur I_n.
La matrice ainsi obtenue est L^{-1} et on l'inverse pour trouver L.

Complexité : $O\left(\frac{n^3}{3}\right)$

ANNEXE 3 : Cholesky en pratique

$A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ permet de définir un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$: $(x,y) \mapsto {}^t x A y$.
On applique Gram-Schmidt à $(e_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ pour obtenir $(\varepsilon_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ orthonormée !
On note P la matrice de passage de (e_i) à (ε_i)
Alors $B = {}^t P^{-1}$.